La géométrie garante de la rigueur des raisonnements

Dans l'Antiquité et jusqu'à Descartes, la géométrie de la règle et du compas est la science qui assure la justesse des raisonnements.

297

LA

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des probleſmes qu'on peut conſtruire ſans y employer que des cercles & des lignes droites.

Tous les Probleſmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt compoſée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion : Ainſi n'a-t'on autre choſe a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que leur en adiouſter d'autres, ou en oſter, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement eſtre priſe a diſcretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit à l'vne de ces deux, comme l'autre eſt a l'vnité, ce qui eſt le meſme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Commẽt le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

298 LA GEOMETRIE.

eſt a l'autre, ce qui eſt le meſme que la Diuiſion; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou pluſieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne; ce qui eſt le meſme que tirer la racine quarrée, on cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

Extrait de l'édition de 1637 de la Géométrie de Descartes.

Activité 1

Partie 1

À partir des représentants de A, B et l'unité que l'on choisira à sa convenance, construire les segments représentants les nombres suivants :

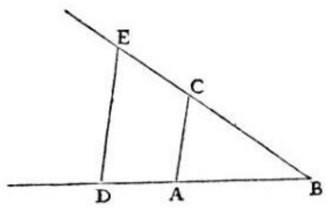
$A+B$; $B-A$; $3A$

Partie 2

En s'inspirant de la procédure décrite par Descartes (ci-contre), construire les représentants de nombres :

$A \times B$; $\frac{B}{5}$; $\frac{1}{A}$

La Multiplication.



Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

La Diuiſion.

Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

Partie 3

En choisissant judicieusement les longueurs des segments dans un triangle rectangle expliquer comment construire simplement les représentants des nombres :

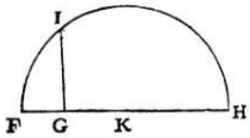
$\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{4}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$

En s'inspirant de la procédure décrite par Descartes (ci-contre), construire le représentant du nombre $\sqrt{A}$.

Peut-on construire un représentant du nombre suivant ?

$$5+\sqrt{\frac{23-\frac{3}{2}+\sqrt{17}}{\sqrt{3}-\sqrt{\sqrt{2}}}}$$

l'Extra-ction dela racine quarrée.



Ou s'il faut tirer la racine quarrée de GH, ie luy adiouſte en ligne droite FG, qui eſt l'vnité, & diuiſant FH en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle FIH, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur FH, c'eſt GI la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy aprés.

<u>Commentaires</u> :

Les opérations précédentes permettent de dire que tout rationnel est constructible, mais aussi que la racine carrée d'un rationnel est constructible. Ainsi, on peut, avec de la patience, construire ce nombre.

Il faut attendre les travaux de Pierre-Laurent Wantzel en 1837, qui, grâce aux travaux de Gauss sur les polygones constructibles, peut énoncer le théorème affirmant que les seuls nombres constructibles à la règle et au compas sont ceux pouvant s'écrire uniquement à l'aide des 5 opérations précédentes. Wantzel exprime aussi la condition suffisante :

(*) Si le réel *a* est constructible alors son polynôme minimale est de degré 2^n